

## Глава 5. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе мы рассмотрим некоторые вопросы численного решения основных уравнений математической физики с помощью конечно-разностных (разностных) методов. Эти методы являются в настоящее время по сути единственными эффективными методами решения уравнений в частных производных (особенно нелинейных) в силу их ряда несомненных достоинств, к которым относятся:

- управляемая точность и подробность представления численного решения с помощью изменения числа узлов разностной сетки и способа их расстановки;
- эффективность и простота в реализации на современных ЭВМ, в том числе на ЭВМ параллельного действия;
- легкость обобщения на многомерные случаи.

Предметом нашего рассмотрения будут в основном эволюционные уравнения гиперболического и параболического типов, изучаемые в традиционных курсах математической физики (одномерные нестационарные задачи), а также классический представитель неэволюционных уравнений – двумерное уравнение Пуассона, являющееся уравнением эллиптического типа. Напомним, что эволюционным называется уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A u = f ,$$

явно разрешенное относительно первой производной и не содержащее в операторе  $A$  производных по времени. Таковыми являются уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

из класса гиперболических уравнений и уравнение теплопроводности из класса параболических

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Мы будем рассматривать численные методы решения как задачи Коши (только для эволюционных уравнений), так и краевых задач в наиболее простых, прямоугольных областях, чтобы не усложнять рассмотрения сути изучаемых методов. Разностные методы строятся в такой последовательности:

- область решения исходной (дифференциальной) задачи заменяется на дискретную (сеточную) и вводятся сеточные функции;
- дифференциальные операторы в уравнениях и в граничных условиях заменяются (аппроксимируются) разностными, определенными на этой сетке для сеточных функций;
- для полученной системы линейных алгебраических уравнений (разностной схемы) доказываются её аппроксимация, корректность и сходимость к решению исходной задачи.

## 1. Общие вопросы теории разностных схем

Исходным пунктом при построении разностной схемы является, как уже указывалось, замена области непрерывного аргумента некоторым конечным множеством точек, покрывающим эту область. Это множество есть область определения функций дискретного аргумента и называется *разностной сеткой*. Соответственно функции дискретного аргумента называются *сеточными функциями*, сами точки - *узлами сетки*, а расстояние между ними - *шагом сетки*. В переменных  $x, t$  ( $x$  - расстояние,  $t$  - время) для прямоугольной области  $D\{0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$  в этом случае множество точек  $(x_i, t^n)$ , где  $x_i = i \cdot h$ ,  $t^n = n \cdot \tau$ ,  $0 \leq i \leq N, h = 1/N, n \geq 0, \tau > 0$  и  $N, n$  - целые положительные числа, образуют сетку с шагами  $h$  по пространству и  $\tau$  по времени. Заметим, что выбранная область изменения  $x$  не принципиальна, так как любой отрезок  $[a, b]$  простой заменой переменной может быть переведен в единичный.

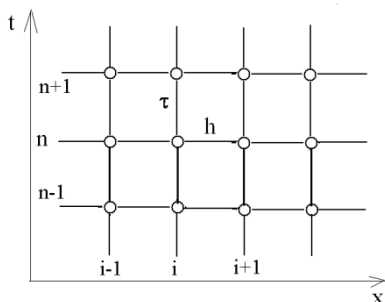


Рис. 1. Структура разностной сетки.

Построенная разностная сетка является прямоугольной при  $\tau \neq h$ , равномерной по  $x$  и  $t$  (поскольку  $\tau = \text{const}, h = \text{const}$ ) и регулярной, так как при любом значении  $n$  (или  $i$ ) число узлов по  $i$  (или  $n$ ) одинаково. Такие сетки хорошо отображаются в память ЭВМ в виде прямоугольных массивов. Сеточную область обозначим через  $D_h\{(x_i, t^n)\}, 0 \leq i \leq N, n \geq 0$ . Сеточные функции, определенные на этой сетке, будем

обозначать  $u_i^n$ . Каждой непрерывной функции  $u \in D$  можно поставить в соответствие сеточную функцию  $u_i^n \in D_h$  по правилу: значение  $u_i^n$  в узле сетки  $(x_i, t^n)$  равно  $u(x_i, t^n)$ . Это отображение является линейным оператором, действующим из подпространства  $D$  в  $D_h$ , а сам оператор называют проектированием функции  $u(x, y)$  на сетку. Совершенно аналогичным образом может быть спроектирован и любой линейный оператор  $L$  на  $D_h$ . Тогда мы можем по величине  $\|u - u_h\|$  в подпространстве  $D_h$  судить о мере близости  $u$  и  $u$ : если

$\|y - u_h\| \rightarrow 0$  при уменьшении шагов сетки, то говорят о сходимости разностного решения к решению дифференциальной задачи.

### 5.1. Аппроксимация

При построении разностной схемы частные производные заменяются (аппроксимируются) конечными разностями для сеточных функций, которые строятся аналогично формулам численного дифференцирования. При этом мы допускаем ошибку - *погрешность аппроксимации*, от величины которой будет зависеть точность численного решения. Определяется она, как и в случае численного дифференцирования, путем разложения в ряд Тейлора, что может быть сделано только для гладких функций, спроектированных на  $D_h$ , поскольку сеточные функции дифференцировать нельзя.

Пример: Заменим в узле сетки  $(x_i, t^n)$  дифференциальный оператор  $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$

разностным для сеточной функции  $y_i^n$ :  $L_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h}$ , где  $u \in C_\infty$ . Чтобы

определить точность аппроксимации, спроектируем  $u$  на  $D_h$  и запишем для

нее такой же оператор  $L_h u_h = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}$ . Разлагая  $u_{i+1}^n$  в ряд Тейлора относи-

тельно точки  $x_i$ , имеем

$$\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = \frac{u_i^n + h(u_x)_i^n + h^2/2(u_{xx})_i^n + \dots - u_i^n}{h} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + O(h).$$

Таким образом, данный разностный оператор имеет первый порядок аппрок-

симации. Аналогичным образом можно показать, что  $L_\tau u_h = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}$

аппроксимирует  $L_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$  также с первым порядком точности.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_i^n + \tau(u_t)_i^n + \tau^2/2(u_{tt})_i^n + \dots - u_i^n}{\tau} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + O(\tau).$$

**Определение:** Говорят, что разностный оператор  $L_h$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L_x$  с порядком  $k > 0$  в точке  $x_i$ , если

$$\left| [L_h u_h - (L_x u)_h]_{x=x_i} \right| = O(h^k).$$

Аналогично:  $\left| [L_\tau u_h - (L_t u)_h]_{x=x_i} \right| = O(\tau^m), m > 0$

**Замечание.** Размеры шагов сетки  $h$  и  $\tau$  не должны превышать радиуса сходимости ряда Тейлора, т.е. должны быть достаточно малы.

Проведя все такие замены в исходном дифференциальном уравнении, получим алгебраическое уравнение, связывающее значение сеточных функций в соседних узлах сетки, т.е. разностную схему, аппроксимирующую это уравнение. Совокупность узлов сетки, входящих в схему, называется ее *шаблоном*.

**Пример:** Для уравнения переноса (1) можно записать следующие разностные схемы типа "уголок":

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = 0, \quad \text{шаблон} \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} \quad (3)$$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad \text{шаблон} \quad \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array} \quad (4)$$

После того как разностная схема построена, следует проверить ее аппроксимацию, которая определяется уже не на классе произвольных гладких функций, как для разностных операторов, входящих в нее, а на классе достаточно гладких решений исходного дифференциального уравнения. При этом могут использоваться и его дифференциальные следствия. Поскольку здесь потребуется разложение в ряд Тейлора, в схему вместо сеточных функций подставляется проекция решения  $u(x,t)$  на  $D_h$ , то есть  $u_h = u_i^n = u(x_i, t^n)$ .

Пример: Рассмотрим для (1) разностную схему «левый уголок» (3), записанную для  $u_h$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0.$$

Разлагая  $u_{i-1}^n, u_i^{n+1}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_i, t_n)$  и подставляя их в разностную схему, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2!} \left( \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{3!} \left( \tau^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \dots = 0.$$

Используя дифференциальные следствия (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad \text{и т.д.,}$$

получаем, что при  $\tau = h/a$  все члены в круглых скобках обращаются в нуль, т.е. аппроксимация точная, но при  $\tau \neq h/a$  погрешность аппроксимации

$O(\tau + h)$ . Выясним причину этого. Уравнение  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  имеет характери-

стику  $\frac{dx}{dt} = a$ , вдоль которой оно может быть записано как  $\frac{du}{dt} = 0$ . В этом слу-

чае задача Коши имеет точное решение  $u = f(x - at)$ , где  $f$  - функция, вид кото-

рой определяется заданием начальных условия, т.е.  $f(x) = u(x, 0) = u_0(x)$ . Раз-

ностную схему (3) запишем в виде  $y_i^{n+1} = y_{i-1}^n + (1 - a\tau/h)y_i^n$ . Соотношение

$\tau/h = a$  аппроксимирует характеристику  $\frac{dx}{dt} = a$ , вдоль которой  $y_i^{n+1} = y_{i-1}^n$ , т.е.

уравнение  $\frac{du}{dt} = 0$  аппроксимируется точно. В то же время схема (4), записан-

ная в виде  $y_i^{n+1} = (y_i^n + a\tau/h y_{i-1}^{n+1})/(1 + a\tau/h)$  при любом значении  $\tau/h$  имеет

точность только  $O(\tau + h)$ .  
 Эти примеры показывают, что точность аппроксимации зависит не только от  $\tau$  и  $h$ , но и от их отношения, которое удобно представить в виде функции  $\tau = \varphi(h)$  такой, что  $\tau \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Эта функция называется законом предельного перехода и играет большую роль при изучении свойств разностных схем. Так, оказывается, что не только порядок аппроксимации зависит от закона предельного перехода, но более того, может оказаться, что одна и та же разностная схема при различных предельных переходах аппроксимирует различные дифференциальные уравнения. Такая аппроксимация называется условной. В качестве примера рассмотрим схему Лакса для решения уравнения переноса

$$\frac{y_i^{n+1} - (y_{i+1}^n + y_{i-1}^n)/2}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} = 0$$

Эта схема имеет погрешность аппроксимации  $O(\tau + h)$  и ее можно записать в следующем виде:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} = 0$$

При законе предельного перехода  $\tau = h^2/a$  эта схема аппроксимирует уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) = 0,$$

не совпадающего с исходным уравнением переноса при  $h \rightarrow 0$ , т.е. аппроксимация отсутствует. Рассмотрим теперь более строго определение аппроксимации.

**Определение.** Если для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} Lu = f, \\ lu = \mu, \text{ -- краевые условия,} \\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ -- начальные условия} \end{cases} \quad (5)$$

Имеют место равенства  $\|L_h u_h - (Lu)_h\| = O(\tau^\alpha) + O(h^k)$ ,

$\|l_h u_h - (lu)_h\| = O(\tau^\beta) + O(h^m)$ , то говорят, что разностная задача аппроксимирует дифференциальную с порядком  $t = \min(\alpha, \beta)$  по  $\tau$  и  $s = \min(k, m)$  по пространству.

Если это имеет место для любого  $\tau^2 + h^2 \leq \tau_0^2$ , причем  $\tau_0$  не зависит от  $u(x, t)$ , то *аппроксимация абсолютная*. Если же эти соотношения нарушаются, но при некотором законе предельного перехода  $\tau = \varphi(h)$  справедлива оценка  $\|L_h u_h - (Lu)_h\| = O(\tau^\alpha)$ ,  $\|l_h u_h - (lu)_h\| = O(\tau^\beta)$ , то говорят об условной аппроксимации, в противном случае аппроксимация отсутствует. Как правило, в случае условной аппроксимации справедлива оценка  $\|L_h u_h - (Lu)_h\| = O(\tau^\alpha) + O(h^\beta) + O(\tau^\gamma, h^\delta)$ , где  $\alpha, \beta > 0$ , а  $\gamma, \delta$  могут быть и отрицательными.

## 5.2. Устойчивость

Понятие устойчивости разностной схемы является составной частью определения её корректности. Напомним, что дифференциальная задача (5) считается поставленной корректно, если:

1) задача однозначно разрешима при любых входных данных из некоторого их класса;

2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных, т.е. малому изменению входных данных соответствуют и малые изменения решения.

По аналогии определяется и корректность разностной задачи.

Разностная задача

$$\begin{cases} L_h y = \varphi, \\ l_h y = v, \\ y^0 = v_0 \end{cases} \quad (6)$$

поставлена корректно, если при любых достаточно малых шагах сетки

1) решение существует и единственно при всех входных данных некоторого допустимого семейства;

2) решение непрерывно зависит от входных данных, причем эта зависимость равномерна относительно величины шагов сетки.

Это означает, что существуют такие постоянные  $M_1 > 0, M_2 > 0, M_3 > 0$ , не зависящие от  $h, \tau$  и от выбора входных данных, что справедливо неравенство

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq M_1 \|\tilde{v}_0 - v\| + M_2 \|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\| + M_3 |\tilde{v}(t) - v(t)|, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

Здесь  $y$  и  $\tilde{y}$  - решения (6) с исходными и возмущенными входными данными соответственно. Неравенство (7) называют устойчивостью разностной схемы. Важное значение имеют его частные случаи. Так, неравенство

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq M_1 \|v_0 - v\| \quad (8)$$

выражает устойчивость по начальным данным, неравенство

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq M_2 \|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\| \quad (9)$$

означает устойчивость по правой части.

Неравенства (7)- (9) называют также *априорными оценками*. Построение подобных априорных оценок и составляет основу теории устойчивости разностных схем. При этом для задачи Коши, вопросами устойчивости которой мы и будем в основном заниматься, доказано, что в случае линейных задач схемы, устойчивые по начальным данным, устойчивы и по правой части. Тогда для линейных операторов  $L_h$  и  $I_h$  оценка устойчивости по начальным данным может быть записана в виде

$$\|y^n\| \leq M_1 \|y^0\|, \quad n \geq 1, \quad (10)$$

чем мы и будем пользоваться.

### 5.3. Сходимость

**Определение.** Говорят, что решение разностной задачи (6) сходится в некоторой сеточной норме к решению дифференциальной задачи (5), если для любого  $t^n$  ( $0 \leq t^n \leq T$ ) имеет место:

$$\|u(x_i, t^n) - y_i^n\| \rightarrow 0 \quad (11)$$

при  $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ , т.е. при измельчении сетки. Если при этом

$$\|u(x_i, t^n) - y_i^n\| = O(\tau^m + h^k) \rightarrow 0, \quad (12)$$

то говорят, что схема (6) имеет точность  $m$  по времени и  $k$  по пространству.

К сожалению, доказать справедливость (11), (12) удается далеко не всегда, и поэтому часто пользуются экспериментальной проверкой сходимости, проводя расчеты на сетках с различным числом узлов, например увеличивая каждый раз их число вдвое и выстраивая кривую зависимости значения нормы в (12) от размера шагов сетки. Однако для нелинейных задач зависимость (12) может оказаться немонотонной, и этим приемом следует пользоваться с осторожностью.

Для линейных уравнений имеет место теорема Лакса.

**Теорема.** (П.Лакс) *Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.*

#### 5.4. Методы исследования устойчивости

При исследовании устойчивости обычно ограничиваются классом линейных разностных схем и тогда в случае задачи Коши условие устойчивости сводится к выполнению неравенства (10), причем уравнение рассматривается без правой части. В дальнейшем мы часто будем пользоваться векторно-матричной формой записи разностных схем, представляя все значения сеточной функции на  $n$ -том временном слое в виде вектора  $\vec{y}^n = (y_0^n, y_1^n, \dots, y_N^n)$  длины  $N+1$ . Так, двухслойные схемы для эволюционных уравнений в общем виде можно записать

$$B_1 \vec{y}^{n+1} = B_0 \vec{y}^n, \quad (13)$$

где  $B_1(\tau, h), B_0(\tau, h)$  - линейные разностные операторы (матрицы). Если  $B_1$  - диагональная матрица, то разностная схема (13) называется *явной*, и *неявной* в противном случае. Так, например, разностная схема (3) в форме (13) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^{n+1} \\ y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ \dots \\ y_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & (1-\gamma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & (1-\gamma) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma & (1-\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^n \\ y_1^n \\ y_2^n \\ \dots \\ y_N^n \end{pmatrix},$$

и является явной схемой, а разностная схема (4) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & (1+\gamma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & (1+\gamma) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma & (1+\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^{n+1} \\ y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ \dots \\ y_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^n \\ y_1^n \\ y_2^n \\ \dots \\ y_N^n \end{pmatrix},$$



и является неявной схемой, где  $\gamma = a\tau/h$ . При этом для (13) всегда должен существовать обратный оператор  $B_1^{-1}$  - условие разрешимости и в разрешенном относительно  $\bar{y}^n$  виде схема запишется  $\bar{y}^{n+1} = B_1^{-1}B_0\bar{y}^n = S\bar{y}^n$ , где  $S$  – оператор перехода, продвигающий решение с  $n$ -го временного слоя на  $n+1$ -й, который также называют оператором шага.

Запишем двухслойную разностную схему в виде (13)

$$\bar{y}^{n+1} = S\bar{y}^n . \quad (14)$$

Ясно, что эта схема будет устойчива по начальным данным, если

$$\|S\| \leq 1. \quad (15)$$

Действительно, в этом случае  $\|\bar{y}^{n+1}\| = \|S\bar{y}^n\| \leq \|S\|\|\bar{y}^n\| \leq \|\bar{y}^n\|$ . Таким образом, условие (15) обеспечивает равномерную устойчивость схемы по начальным данным:  $\|\bar{y}^{n+1}\| \leq \|\bar{y}^n\| \leq \dots \leq \|\bar{y}^0\|$ . Однако разностное уравнение должно допускать и возрастающие решения. Поэтому наряду с неравенством (15) будем рассматривать и оценку

$$\|S\| \leq 1 + C_0\tau, \quad (16)$$

где  $C_0 > 0$  - постоянная, не зависящая от  $h, \tau$ . Если ввести в рассмотрение экспоненту  $\exp(C_0\tau) = 1 + C_0\tau + (C_0\tau)^2/2 + \dots$ , то неравенство (16) можно записать в виде

$$\|S\| \leq e^{C_0\tau},$$

чем мы часто и будем пользоваться. Тогда оценка устойчивости

$$\|\bar{y}^{n+1}\| \leq (1 + C_0\tau)\|\bar{y}^n\| \leq e^{C_0\tau}\|\bar{y}^n\| \leq e^{C_02\tau}\|\bar{y}^{n-1}\| \leq \dots \leq e^{C_0T}\|\bar{y}^0\| = M_1\|\bar{y}^0\|,$$

$0 \leq t^n \leq T$ ,  $M_1 = e^{C_0T}$  не зависит от  $n, \tau$ .  $T$  - промежуток времени, на котором отыскивается решение.

Для исследования устойчивости разностных схем существует много методов. Мы рассмотрим только два из них: метод Неймана и принцип максимума. Эти методы достаточно просты, эффективны и могут применяться как для явных, так и для неявных двухслойных и многослойных разностных схем.

Метод Неймана основан на следующей простой идее. Любые начальные данные для эволюционных уравнений можно представить в виде ряда Фурье,

который содержит гармоники вида  $q \cdot e^{ikx}$ , где  $q = e^{\omega t}$  – амплитуда данной гармоники,  $i$  – мнимая единица,  $\omega$  – круговая частота,  $k$  – волновое число. Зависимость между  $k$  и  $\omega$  определяется из подстановки выражения  $q \cdot e^{ikx}$  в соответствующее эволюционное уравнение и в общем случае имеет вид  $\omega = L(\mathbf{ik})$ , называемым также дисперсионным соотношением. Например, для уравнения переноса (1)  $\omega = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}$ , а для уравнения теплопроводности (2)  $\omega = -\sigma k^2$ . Таким образом, амплитуда  $q$  также может быть как комплексной величиной, так и действительной, однако ее модуль определяет скорость роста соответствующей пространственной гармоники. Поэтому, если  $|q|$  остается ограниченной для любой гармоники по пространству  $e^{ikx}$ , то очевидно, что и решение будет оставаться ограниченным во времени. Эти же соображения справедливы и для разностной схемы, причем, учитывая, что  $t = n \cdot \tau$ ,  $x = i \cdot h$ , сеточное представление гармоники будет иметь вид  $e^{\omega n \tau + ikx} = q^n \xi^k$ , где  $q = e^{\omega \tau}$ ,  $\xi = e^{ikh}$ . Тогда сеточная функция  $y_i^n$  может быть представлена как

$$y_i^n = y_0 q^n \xi^i, \quad (17)$$

где  $y_0$  – значение сеточной функции при  $n = i = 0$ . Подставляя выражения для  $y_i^n$  в (15), после сокращения на  $y_0 q^n$  получим  $q \cdot \vec{v} = S \cdot \vec{v}$ , где  $\vec{v} = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^i, \dots, \xi^N)$  есть вектор длины  $N+1$ . Тогда

$$|q| \cdot \|\vec{v}\| = \|S \cdot \vec{v}\| \leq \|S\| \cdot \|\vec{v}\| \quad \text{и} \quad |q| \leq \|S\|.$$

Поэтому необходимое условие устойчивости схемы состоит в выполнении неравенства

$$|q| \leq 1 \quad (18)$$

или

$$|q| \leq 1 + C_0 \tau \quad (19)$$

**Замечание 1.** Поскольку величина  $y_0$  входит в обе части (17), ее конкретное значение несущественно и поэтому в дальнейшем всегда будем полагать  $y_0 = 1$ .

**Замечание 2.** Амплитуда  $q$  является в общем случае комплексной величиной с аргументом  $\varphi$ , т.е.  $q = q(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Сеточная гармоника  $\vec{v} = \{\xi^i\}$  удовлетворяет уравнению  $S \cdot \vec{v} = q \cdot \vec{v}$  и является, таким образом, собственным вектором оператора  $S$ , а величина  $q$  – соответствующим собственным значением. Тогда условие устойчивости может быть записано как

$$\max |q| \leq 1.$$

Поэтому это неравенство называют также *спектральным критерием устойчивости*.

Полученное выше условие, известное также как критерий Неймана, является лишь необходимым условием, но не достаточным, так как показывает только ограниченность роста амплитуд гармоник и применимо лишь к линейным разностным уравнениям с нулевой правой частью, поскольку основано на принципе суперпозиций гармоник. Однако на практике его часто используют и как достаточное условие устойчивости.

Пример. Применим критерий Неймана к анализу устойчивости трех разностных схем для уравнения переноса при  $a > 0$ .

1. Схема типа "уголок" с левой односторонней разностью

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = 0.$$

Подставим в это разностное уравнение сеточную функцию  $y_k^n = q^n \xi^k$ , определим  $q$  и вычислим

$$\frac{q^{n+1} \xi^i - q^n \xi^i}{\tau} + a \frac{q^n \xi^i - q^n \xi^{i-1}}{h} = 0$$

После сокращения на  $q^n \xi^i$  имеем  $q - 1 + a \cdot \tau/h(1 - \xi^{-1}) = 0$ . Вводя обозначение  $\gamma = a \cdot \tau/h > 0$  и учитывая, что  $\xi^{-1} = e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)$ , получим

$q = 1 - \gamma(1 - \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ . Так как  $1 - \cos(\varphi) = 2 \sin^2(\varphi/2)$ ,

$\sin(\varphi) = 2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$ , то  $q^2 = 1 - 4\gamma(1 - \gamma) \sin^2(\varphi/2)$ . Отсюда следует, что  $|q| \leq 1$  при  $\gamma \leq 1$ , т.е. данная разностная схема условно устойчива, а неравенство  $\gamma \leq 1$  является необходимым условием ее устойчивости. (Докажите самостоятельно, что при  $a < 0$  схема абсолютно неустойчива.)

2. Схема "уголок" с правой разностью

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} = 0$$

Для величины  $q$  имеем  $q - 1 + \gamma(\xi - 1) = 0$  или  $q = 1 - \gamma(\cos(\varphi) - 1 + i \cdot \sin(\varphi))$ ,

$q^2 = 1 + 4\gamma(1 + \gamma) \sin^2(\varphi/2)$ , откуда следует, что  $|q| \geq 1$  при любом  $\gamma \geq 0$ , т.е.

схема в соответствии с критерием (18) абсолютно неустойчива. Посмотрим, будет ли для нее выполняться условие устойчивости (19).

Имеем:  $q = 1 + \gamma - \gamma \cos(\varphi) - \mathbf{i} \cdot \sin(\varphi)$ , откуда получаем  $|q| \leq 1 + 2\gamma$  или  $|q| \leq 1 + 2a \cdot \tau/h = 1 + C_0\tau$ ,  $C_0 = 2a/h$ , т.е. условие независимости  $C_0$  от  $h$  в (16) не выполняется и схема по-прежнему абсолютно неустойчива.

### 3. Разностная схема с центральной разностью

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} = 0$$

Для нее  $q = 1 - \mathbf{i} \cdot \gamma \sin(\varphi)$ ,  $q^2 = 1 + \gamma^2 \sin^2(\varphi) \geq 1$  при любом  $\gamma$ , т.е. согласно (18) схема абсолютно неустойчива. С другой стороны,  $q^2 \leq 1 + \gamma^2$  и если  $\gamma^2 \leq C_0\tau$ , где  $C_0 = (a/h)^2 \cdot \tau$ , то согласно (19)  $|q|^2 \leq e^{C_0\tau}$  или  $|q| \leq e^{C_0\tau/2}$  и схема условно устойчива при  $\tau = C_1(h/a)^2$ ,  $C_1 = C_0/2 = \text{const}$ .

Рассмотрим теперь **принцип максимума**, который применяется для исследования устойчивости явных и неявных разностных схем в случаях как задачи Коши, так и начально-краевой (смешанной) задачи. Рассмотрим его на примере смешанной задачи для двухслойной разностной схемы (14), которую запишем в виде

$$y_i^{n+1} = \sum_{j=-k}^m \alpha_j y_{i+j}^n, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad y_0^n = \mu^n, \quad y_N^n = \nu^n,$$

где  $\alpha_j$  - коэффициенты, зависящие от  $\tau, h$ ;  $k, m$  - целые положительные числа, определяемые шаблоном схемы;  $\mu^n = \mu(n \cdot \tau) = \mu(t)$ ,  $\nu^n = \nu(n \cdot \tau) = \nu(t)$  - заданные значения сеточной функции на границах области. Поскольку (15) при соответствующих граничных условиях удовлетворяет тривиальному решению  $\bar{y}^n = \text{const}$ , имеет место равенство  $\sum_{j=-k}^m \alpha_j = 1$ . Пусть теперь все  $\alpha_j \geq 0$ . Для внутренних узлов области ( $1 \leq i \leq N-1$ ) справедливо неравенство

$$|y_i^{n+1}| \leq \sum_{j=-k}^m \alpha_j |y_{i+j}^n|.$$

Взяв максимум по  $i$  от обеих частей на соответствующем временном слое, запишем его через нормы в пространстве  $C$

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_C \leq \|\bar{y}^n\|_C, \quad \text{где } \|\bar{y}^n\|_C = \max_i |y_i^n|.$$

Тогда для всех узлов сетки имеем:

$$\begin{aligned} \|\bar{y}^{n+1}\|_C &\leq \max(|\mu^n|, |v^n|, \|\bar{y}^n\|_C) \leq \max\{|\mu^n|, |v^n|, \max(|\mu^{n-1}|, |v^{n-1}|, \|\bar{y}^{n-1}\|_C)\} = \\ &= \max\{\max(|\mu^n|, |\mu^{n-1}|), \max(|v^n|, |v^{n-1}|), \|\bar{y}^{n-1}\|_C\} \leq \dots \leq \max\{\max(|\mu^n|, \\ &|\mu^n|, \dots, |\mu^0|), \max(|v^n|, |v^{n-1}|, \dots, |v^0|), \|\bar{y}^0\|_C\} \end{aligned} \quad (20)$$

Полученное неравенство (20) и называют принципом максимума для разностных схем: *максимальное значение модуля разностного решения достигается на границе области*. Нетрудно видеть, что в случае задачи Коши оно означает равномерную устойчивость схемы по начальным данным:

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_C \leq \|\bar{y}^n\|_C \leq \|\bar{y}^{n-1}\|_C \leq \dots \leq \|\bar{y}^0\|_C \quad (21)$$

Из принципа максимума для явных разностных схем следует важное утверждение: *если в схеме все коэффициенты  $\alpha_j$  неотрицательны, то схема устойчива*. Отсюда, однако, не следует, что при его нарушении схема будет неустойчивой (это обычно схемы второго порядка точности и выше). Просто в таком случае принцип максимума применять нельзя.

### 5.5. Разностные схемы для решения уравнений гиперболического типа

В качестве типичного примера таких уравнений будем рассматривать уравнение переноса.

Линейное одномерное уравнение переноса в общем случае записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) . \quad (22)$$

Это уравнение имеет одну характеристику  $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$ , вдоль которой оно может быть записано как обыкновенное дифференциальное уравнение

$\frac{du}{dt} = f(x, t)$ . Для (22) может быть поставлена либо задача Коши, т.е. дополни-

тельно должны быть заданы начальные условия при  $t = 0$ :

$u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , либо смешанная (начально-краевая) задача на конечном (или полубесконечном) интервале  $[x_n, x_k]$ . В последнем случае кроме начальных условий  $u(x, 0) = u_0(x)$  на границе области, для которой характеристика является выводящей, задается дополнительно еще одно (граничное) условие. Например, если  $a(x_n, t) > 0$ ,  $a(x_k, t) > 0$ , то задается одно граничное

условие при  $x = x_H$ :  $u(x_H, t) = \varphi(t)$ . Если же  $a(x_H, t) > 0$ ,  $a(x_K, t) < 0$ , то задаются уже два условия:  $u(x_H, t) = \varphi(t)$  и  $u(x_K, t) = \mu(t)$ . В дальнейшем будем рассматривать только случай, когда  $a(x, t) = a = \text{const}$ ,  $f(x, t) = 0$ . Тогда (22) совпадает с уравнением (1) и при  $a > 0$  смешанная задача имеет точное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - a \cdot t), & \text{при } x \geq a \cdot t, \\ \varphi(t - x/a), & \text{при } x < a \cdot t \end{cases}$$

### 5.5.1. Область зависимости и устойчивость

Характерным для уравнений гиперболического типа является наличие области зависимости решения от начальных и граничных условий, которая ограничена характеристиками, выходящими из какой-либо точки внутри области вплоть до пересечения их с границами области. Так, область зависимости уравнения переноса (22) состоит из одной точки. Разностные уравнения (15) тоже имеют области зависимости, но она определяется структурой матрицы оператора шага  $S$  (для  $i$ -го узла сетки по числу и расположению ненулевых элементов  $i$ -ой строки). В случае явных схем эта область совпадает с шаблоном схемы, для неявных - необязательно (схемы с центральными разностями). К сожалению, разностные схемы не обладают характеристическими свойствами и области зависимости дифференциальных и разностных уравнений могут не совпадать. Покажем, что для гиперболических уравнений это может приводить к отсутствию сходимости. Запишем для уравнения переноса (1) явную разностную схему (3) типа "уголок" в виде

$$y_i^{n+1} = (1 - \gamma)y_i^n + \gamma y_{i-1}^n, \quad \gamma = a \cdot \tau / h.$$

Вычисление  $y_i^{n+1}$  при  $\gamma \leq 1$  можно интерпретировать как результат линейной интерполяции между значениями сеточной функции  $y_i^n$  и  $y_{i-1}^n$  в точке  $x_* = x_i - \gamma \cdot h = x_i - a \cdot \tau$ , являющейся точкой пересечения прямой  $t = n \cdot \tau$  с характеристикой  $\frac{dx}{dt} = a$ , выпущенной из узла сетки  $M(ih, (n+1)\tau)$  и перенос этого значения  $y_*^n$  по характеристике (рис. 2), которая в этом случае лежит внутри шаблона разностной схемы. При возмущении решения дифференци-

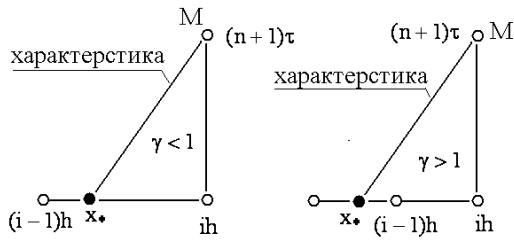


Рис. 2. Области зависимости схемы

области зависимости разностной схемы, значение  $y_*^n$  определяется уже путем экстраполяции и схема "не заметит" возмущения решения в окрестности этой точки. Поэтому задача оказывается некорректной, а, следовательно, неустойчивой. Аналогичная ситуация возникает и при использовании в (3) правосторонней разности:

$$y_i^{n+1} = (1 + \gamma)y_i^n - \gamma y_{i+1}^n$$

(схема типа «правый уголок»), как это показано на рис. 3 а. Тогда при  $a > 0$  такая схема будет абсолютно неустойчивой, но остается условно устойчивой в случае  $a < 0$  при  $|\gamma| \leq 1$ . Неявная схема (4), разрешенная относительно  $y_i^{n+1}$ , запишется

$$y_i^{n+1} = \frac{y_i^n + \gamma y_{i-1}^{n+1}}{1 + \gamma}.$$

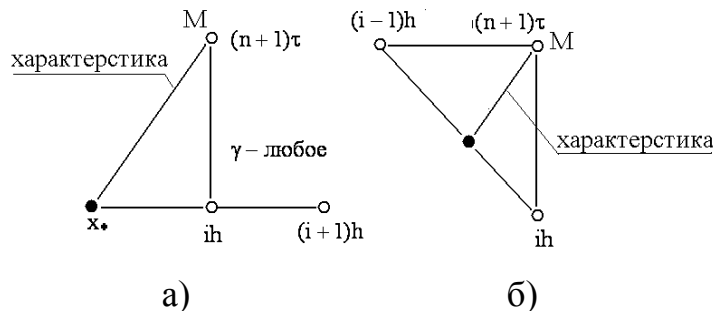


Рис. 3. Шаблоны абсолютно неустойчивой (а) и абсолютно устойчивой (б) схем

Для нее при любом  $\gamma$  характеристика лежит всегда внутри области зависимости (рис. 3 б) и схема абсолютно устойчива. Если же здесь заменить левую разность на правую, то характеристика всегда будет лежать вне области зависимости и схема будет абсолютно неустойчива.

На основании изложенного выше можно сделать следующий вывод. Для устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнения гиперболического типа, необходимо, чтобы область зависимости разностных уравнений включала в себя область зависимости дифференциальных. Заметим, что это лишь необходимое, но не достаточное условие устойчивости, позволяющее отбраковывать заведомо неустойчивые разностные схемы.

### 5.5.2. Явные схемы

Выше мы уже рассмотрели схемы первого порядка точности типа «уголок» для решения уравнений гиперболического типа. Эти схемы просты в реализации и пригодны для решения как задачи Коши, так и смешанной задачи, и на них более останавливаться не будем. Заметим лишь, что их можно объединить в одну схему, позволяющую учитывать знакопеременность коэффициента в (3):

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{(a + |a|)}{2} \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} + \frac{(a - |a|)}{2} \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} = 0$$

Этим же целям служит использование центральных разностей для аппроксимации производных по пространству. Это, например, схема Лакса

$$\frac{y_i^{n+1} - (y_{i+1}^n + y_{i-1}^n)/2}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} = 0, \quad (23)$$

имеющая трехточечный шаблон. Схема, как было показано в п. 5.1, обладает условной аппроксимацией. Она удовлетворяет принципу максимума, откуда следуют ее монотонность и устойчивость при  $\gamma \leq 1$ .

Для повышения порядка точности можно использовать аппроксимации производных центральными разностями. Примером такой схемы является схема "крест", которая для (1) запишется:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} = 0.$$

Нетрудно проверить, что она имеет второй порядок точности по пространству и по времени. Исследуем условия ее устойчивости по Нейману.

$$\frac{q - q^{-1}}{2\tau} + a \frac{\xi - \xi^{-1}}{2h} = 0 \quad \text{или} \quad q^2 + i \cdot 2q\gamma \cdot \sin(\varphi) - 1 = 0,$$

откуда  $q = -i \cdot \gamma \sin(\varphi) \pm \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(\varphi)}$ , и  $|q| \leq 1$  при  $\gamma \leq 1$ . Схема условно устойчива.

Другой способ построения схем второго порядка точности используется в схеме Лакса-Вендроффа. Здесь для (1) решение разлагается в ряд Тейлора по переменной  $t$  в точке  $t = t^n$  и удерживаются только первые два члена разложения:

$$u^{n+1} = u^n + \tau u_t^n + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}^n. \quad (24)$$



Выражая здесь  $u_{tt}$  из уравнения (1) путем его перекрестного дифференцирования, имеем  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  и после подстановки в (24) и замены  $u$  на сеточные функции, получим разностное уравнение

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} = 0, \quad (25)$$

которое и называется схемой Лакса-Вендроффа. Схема имеет второй порядок точности  $O(\tau^2 + h^2)$ , четырехточечный шаблон и условно устойчива при  $\gamma \leq 1$ . Действительно, спектральное уравнение для (25) имеет вид

$$q - 1 + \gamma/2(\xi - \xi^{-1}) - \gamma^2/2(\xi - 2 + \xi^{-1}) = 0,$$

откуда  $q = 1 - \gamma^2(1 - \cos(\varphi)) - i \cdot \gamma \sin(\varphi)$ ,  $|q|^2 \leq 1 - \gamma^2(1 - \gamma^2)$  и  $|q| \leq 1$  при  $\gamma \leq 1$ . Широко распространен двухшаговый вариант этой схемы (типа предиктор - корректор), шаблон которой показан на рис. 4.

1. Этап предиктора:

$$\frac{y_{i+1/2}^{n+1/2} - (y_i^n + y_{i+1}^n)/2}{\tau/2} + a \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} = 0$$

2. Этап корректора:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1/2}^{n+1/2} - y_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

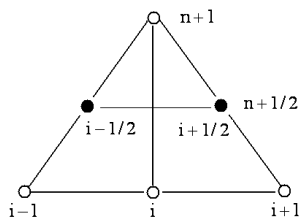


Рис. 4. Шаблон схемы Лакса-Вендроффа

Значения сеточной функции  $y_{i+1/2}^{n+1/2}$ ,  $y_{i-1/2}^{n+1/2}$  в промежуточных узлах сетки вычисляются с помощью схемы Лакса (предиктор), окончательное значение  $y_i^{n+1}$  -

по схеме "крест" (корректор). Нетрудно показать, что, исключая промежуточные значения, снова приходим к схеме (25).

Из двухшаговых схем большой популярностью пользуется также схема Мак-Кормака:

предиктор: 
$$\frac{\hat{y}_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} = 0, \quad (26)$$

корректор: 
$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left[ \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} + \frac{\hat{y}_i^{n+1} - \hat{y}_{i-1}^n}{h} \right] = 0.$$

или 
$$y_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ y_i^n + \hat{y}_i^n + \tau a \frac{\hat{y}_i^{n+1} - \hat{y}_{i-1}^n}{h} \right].$$

Исключая промежуточный шаг (предиктор), снова получим (25). Схема не использует полущелых узлов и легко программируется, чередование "уголков" на этапах предиктора и корректора может быть обратным.

Общей проблемой для всех схем, использующих центральные разности для аппроксимации производных по пространству, является расчет правой границы при  $a > 0$  (соответственно левой при  $a < 0$ ) в случае смешанной задачи. Обычно здесь используется одна из схем типа "уголок" первого порядка точности.

Заметим, что это эквивалентно использованию в (25, 26) дополнительного узла разностной сетки  $N+1$ , лежащего вне сеточной области, значение сеточной функции в котором определяется линейной экстраполяцией:

$$y_{N+1}^n = 2y_N^n - y_{N-1}^n.$$

На основе схемы Мак-Кормака можно построить схемы второго порядка точности, учитывающие поведение характеристик исходного дифференциального уравнения. Такие схемы при аппроксимации пространственных производных используют односторонние разности, и их называют "схемами с разностями против потока". Для уравнения переноса (1) имеем ( $a > 0$ )

этап предиктора

$$\frac{\hat{y}_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} = 0,$$

этап корректора

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left[ \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} + \frac{y_{i-2}^n - 2y_{i-1}^n + y_i^n}{h} + \frac{\hat{y}_i^n - \hat{y}_{i-1}^n}{h} \right] = 0.$$

При  $a < 0$  используются противоположные односторонние разности:

предиктор: 
$$\frac{\hat{y}_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = 0$$

корректор: 
$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left[ \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} + \frac{y_{i+2}^n - 2y_{i+1}^n + y_i^n}{h} + \frac{\hat{y}_{i+1}^n - \hat{y}_i^n}{h} \right] = 0.$$

Добавление на этапе корректора второй разности обеспечивает повышение порядка точности схемы, условием ее устойчивости является  $\gamma \leq 2$ . (Проверьте это все самостоятельно.) Для этих схем проблем с расчетом границ не возникает.

### 5.5.3. Неявные схемы

Из разностных схем первого порядка точности выделим так называемые "схемы бегущего счета", особенно удобные при решении смешанных задач. Рассмотрим две такие схемы для решения (1) при  $a \geq 0$ . Пусть поставлена начально-краевая задача

$$u_t + a u_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq x < \infty.$$

Для ее численного решения можно использовать схему (4):

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n \geq 0,$$

$$y_i^0 = u_0(i \cdot h), \quad 0 \leq i \leq N, \quad y_0^n = \mu(t^n) = \mu(n \cdot \tau), \quad n \geq 1$$

Эта схема разрешается явным образом по рекуррентной формуле

$$y_i^{n+1} = \frac{y_i^n + \gamma y_{i-1}^{n+1}}{1 + \gamma}, \tag{27}$$

причем вычисления проводятся слева направо, с чем связано и название схемы. Исследуем устойчивость этой разностной начально-краевой задачи с помощью принципа максимума (20). Запишем схему в виде

$$(1 + \gamma) y_i^{n+1} = \gamma y_{i-1}^{n+1} + y_i^n.$$

Тогда имеет место неравенство

$$(1 + \gamma) \max_i |y_i^{n+1}| \leq \gamma \max_i |y_{i-1}^{n+1}| + \max_i |y_i^n|$$

Пусть  $\|\bar{y}^n\|_C = \max |y_i^n|, i = 1, 2, \dots, N$ . Тогда имеем

$$(1 + \gamma) \|\bar{y}^{n+1}\|_C \leq \gamma \max(\|\bar{y}^{n+1}\|_C, |y_0^{n+1}|) + \|\bar{y}^n\|_C.$$

Существуют две возможности:

1. Максимум на  $n+1$ -м слое достигается в граничной точке. В этом случае

$$\max_i |y_i^{n+1}| \leq |y_0^{n+1}| = |\mu^{n+1}|.$$

2. Во внутренней точке, тогда

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_C \leq \|\bar{y}^n\|_C.$$

Объединяя их, можем записать  $\|\bar{y}^{n+1}\|_C \leq \max(|\mu^{n+1}|, \|\bar{y}^n\|_C)$ . Последовательно применяя это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} \|\bar{y}^{n+1}\|_C &\leq \max\{|\mu^{n+1}|, \max(|\mu^n|, \|\bar{y}^{n-1}\|_C)\} = \max\{|\mu^{n+1}|, |\mu^n|, \|\bar{y}^{n-1}\|_C\} \leq \\ &\leq \dots \leq \max\{\max(|\mu^{n+1}|, |\mu^n|, \dots, |\mu^1|, \|\bar{y}^0\|_C)\}. \end{aligned}$$

Или

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_C \leq \max(|\mu^m|, \|\bar{y}^0\|_C), \quad 0 < m \leq n+1.$$

Полученное неравенство показывает, что решение достигает максимального по абсолютной величине значения либо на границе  $x = 0$ , либо в начальный момент времени, т.е. разностная схема устойчива при любом значении  $\gamma$ .

Второй вариант схемы запишем в виде правого "уголка"

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} &= 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n \geq 0, \\ y_i^0 &= u_0(i \cdot h), \quad 0 \leq i \leq N, \quad y_0^n = \mu(t^n) = \mu(n \cdot \tau), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Разрешая ее относительно  $y_{i+1}^{n+1}$ , получаем также рекуррентную формулу бегущего счета:

$$y_{i+1}^{n+1} = \frac{(\gamma - 1)y_i^{n+1} + y_i^n}{\gamma}$$

Аналогичным образом с помощью принципа максимума можно показать (сделайте это самостоятельно), что данная схема устойчива только при выполнении условия  $\gamma \geq 1$ . Объединяя ее с явной схемой (3), устойчивой при  $\gamma \leq 1$ , получим схему Карлсона

$$y_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} (1 - \gamma)y_{i+1}^n + \gamma y_i^n, & \text{при } \gamma \leq 1, \\ \frac{(\gamma - 1)y_i^{n+1} + y_i^n}{\gamma}, & \text{при } \gamma \geq 1 \end{cases}$$

Можно построить неявную двухшаговую разностную схему второго порядка точности, если в предикторе схемы Лакса-Вендрофа заменить схему Лакса на неявную схему бегущего счета:

$$\frac{y_i^{n+1/2} - y_i^n}{\tau/2} + a \frac{y_i^{n+1/2} - y_{i-1}^{n+1/2}}{h} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^{n+1/2} - y_{i-1}^{n+1/2}}{2h} = 0$$

Здесь неявный предиктор обеспечивает запас устойчивости, а явный корректор - второй порядок точности.

#### 5.5.4. Решение многомерного уравнения переноса

Ограничиваясь двумерным случаем, запишем уравнение переноса с постоянными коэффициентами в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

в прямоугольной области  $D\{0 \leq x \leq x_1, 0 \leq y \leq y_1, t \geq 0\}$  с граничными и начальными условиями:

$$u(0, y, t) = \mu(y, t), \quad u(x, 0, t) = v(x, t), \quad u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

где  $\mu(y, t), v(x, t), \varphi(x, y)$  – заданные функции. Заменим область  $D$  сеточной областью

$$D_h\{0 \leq i h_1 \leq x_1, 0 \leq j h_2 \leq y_1, n \tau \geq 0\}, \quad i = 0, \dots, N_1; \quad j = 0, \dots, N_2;$$

$h_1 = x_1 / N_1, h_2 = y_1 / N_2$ , в которой определим сеточную функцию  $y_{i,j}^n$ . Явная и неявная разностные схемы первого порядка точности для его решения запишутся путем простого обобщения схем (3, 4)

$$\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} + a \frac{y_{i,j}^n - y_{i-1,j}^n}{h_1} + a \frac{y_{i,j}^n - y_{i,j-1}^n}{h_2} = 0$$

$$\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} + a \frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1} + a \frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2} = 0 \quad (29)$$

Для неявной схемы используется, как и в одномерном случае, бегущий счет, реализация которого для данной схемы достаточно очевидна.

Явные схемы второго порядка точности можно построить на основе двухшаговых схем Лакса-Вендрофа и Мак-Кормака на шеститочечных шаблонах. Схема Лакса-Вендрофа запишется:

1. Этап предиктора:

$$\frac{y_{i,j}^{n+1/2} - (y_{i,j}^n + y_{i+1,j}^n + y_{i+1,j+1}^n + y_{i,j+1}^n)/4}{\tau/2} + a \frac{(y_{i+1,j}^n - y_{i-1,j}^n)}{2h_1} + b \frac{(y_{i,j+1}^n - y_{i,j-1}^n)}{2h_2} = 0$$

2. Этап корректора:

$$\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1,j}^{n+1/2} - y_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_1} + b \frac{y_{i,j+1}^{n+1/2} - y_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_2} = 0$$

Схема Мак-Кормака:

1. Этап предиктора:

$$\frac{\hat{y}_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1,j}^n - y_{i,j}^n}{h_1} + b \frac{y_{i,j+1}^n - y_{i,j}^n}{h_2} = 0,$$

2. Этап корректора:

$$y_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ y_{i,j}^n + \hat{y}_{i,j}^n + \tau a \frac{\hat{y}_{i,j}^{n+1} - \hat{y}_{i-1,j}^n}{h_1} + \tau b \frac{\hat{y}_{i,j}^{n+1} - \hat{y}_{i,j-1}^n}{h_2} \right]$$

Аналогичным образом на основе схемы (29) можно записать двухшаговые неявную разностную схему второго порядка точности (пятиточечный шаблон):

1. Этап предиктора:

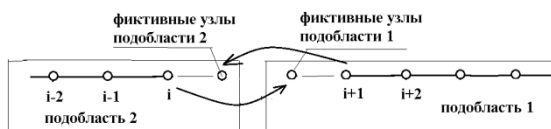
$$\frac{y_{i,j}^{n+1/2} - y_{i,j}^n}{\tau/2} + a \frac{y_{i,j}^{n+1/2} - y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1} + b \frac{y_{i,j}^{n+1/2} - y_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_2} = 0, \quad (30)$$

2. Этап корректора:

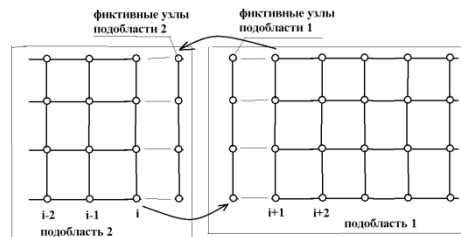
$$\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} + a \frac{y_{i+1,j}^{n+1/2} - y_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_1} + b \frac{y_{i,j+1}^{n+1/2} - y_{i,j-1}^{n+1/2}}{2h_2} = 0.$$

### 5.5.5. Параллельные алгоритмы для решения уравнения переноса

Для распараллеливания явных разностных схем сеточная область разбивается на несколько подобластей по числу процессоров (рис. 5.4, 5.5).



5.4. Обменные граничные условия в одномерной задаче



5.4. Обменные граничные условия в двумерной задаче

В каждой из подобластей вводится ряд фиктивных узлов разностной сетки (обменные граничные условия), которые перекрываются с узлами соседних подобластей и хранят граничные значения сеточной функции соседних подобластей. Сколько и каких фиктивных узлов необходимо создать, определяется шаблоном разностной схемы в плоскости пространственных переменных. Так, для одномерных задач, при решении которых разностные схемы используют трехточечный шаблон, необходимо задать по одному фиктивному узлу на каждой внутренней границе, разностные схемы для решения двумерных задач, использующие пятиточечные шаблоны, требуют уже задания одномерных массивов фиктивных узлов на каждой внутренней границе. Перед началом вычислений значений сеточной функции на следующем шаге по времени необходимо в каждой из подобластей переслать значения сеточной функции из приграничных узлов в фиктивные узлы. Поэтому эффективность распараллеливания будет зависеть от соотношения времени обработки процессором внутренних узлов подобласти и времени пересылки значений сеточной функции в фиктивные узлы соседних процессоров, т.е. будет пропорциональна отношению числа внутренних узлов к числу граничных.

Из этого следует, что на кластерных системах зависимость коэффициента ускорения вычислений от числа процессоров будет иметь максимум, т.е. для каждой задачи, для решения которой используются явные разностные схемы, существует свое оптимальное число процессоров, при котором достигается наибольшее значение этого коэффициента.

Для неявных разностных схем ситуация не столь однозначная. Так, для одномерных задач использование схемы бегущего счета (27), основанной на рекуррентных вычислениях, не позволяет разработать для нее параллельный алгоритм. Для двумерных задач неявная разностная схема (30) допускают распараллеливание, если вычисления организовать так, как это показано на рис. 5.6.

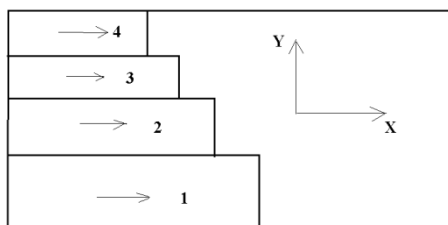


Рис. 5.6. Алгоритм распараллеливания схемы (30)

Область решения разбивается на горизонтальные полосы по числу процессоров, каждая из которых содержит достаточно некоторое число узлов разностной сетки. Счет начинается с полосы № 1 слева направо, для которой граничные условия заданы на нижней и на левой границах области. Счет полосы № 2 начинается тогда, когда будет вычислено значение сеточной функции в одном узле верхней границы области № 1, которое является для полосы № 2 значением сеточной функции на ее нижней границе. Граничные значения для нее на левой границе заданы. После достижения полосой № 1 правой границы она начинает расчет значений сеточной функции на следующем временном слое. Здесь также эффективность алгоритма зависит от отношения числа внутренних узлов сетки к числу узлов на границах полос.

## 5.6. Решение уравнений параболического типа

Наиболее характерным представителем этого класса уравнений являются уравнения, описывающие процесс распространения тепла или процесс диффузии. Далее будем рассматривать только уравнение теплопроводности (2). Для него может быть поставлена как задача Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad \sigma > 0 - \text{коэффициент температур опроводности,} \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (31)$$

так и начально-краевая задача (в дальнейшем просто краевая задача).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad \sigma > 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ \alpha_1 u(a, t) + \beta_1 u_x(a, t) &= \gamma_1, \quad \alpha_2 u(b, t) + \beta_2 u_x(b, t) = \gamma_2. \end{aligned}$$

Если при этом  $\alpha_j \neq 0, \beta_j = 0, (j = 1, 2)$ , то говорят, что поставлена первая краевая задача, если  $\alpha_j = 0, \beta_j \neq 0$ , то вторая, и если  $\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0$ , - то третья.

### 5.6.1. Явные разностные схемы

Простейшая разностная схема для уравнения (2), имеющая минимальный (четырёхточечный) шаблон запишется:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} - \sigma \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} = 0. \quad (32)$$

Легко проверить, что она имеет порядок аппроксимации  $O(\tau + h^2)$  и удовлетворяет принципу максимума (т. е. является устойчивой) при выполнении условия  $\tau \cdot \sigma / h^2 = \gamma \leq 1/2$ . В случае краевой задачи по схеме (32) вычисляются значения сеточной функции только во внутренних узлах сетки. Ее граничные значения определяются из граничных условий задачи. Трёхслойная схема "крест" (пятиточечный шаблон)

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} - \sigma \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} = 0. \quad (33)$$



имеет порядок аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$ , но является абсолютно неустойчивой. Действительно, ее спектральное уравнение

$$\frac{q - q^{-1}}{2\tau} - \sigma \frac{\xi - 2 + \xi^{-1}}{h^2} = 0.$$

откуда  $q^2 - 2q\gamma(\cos(\varphi) - 1) - 1 = 0$ , и  $|q| \geq 1$  при любом значении  $\gamma$ .

Модификация этой схемы, известная под названием схемы Дюфорта-Франкела (схема "ромб")

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} - \sigma \frac{y_{i+1}^n - y_i^{n+1} - y_i^{n-1} + y_{i-1}^n}{h^2} = 0. \quad (34)$$

имеет четырехточечный шаблон и является безусловно устойчивой. Покажем это с помощью метода Неймана. Имеем

$$\frac{q - q^{-1}}{2\tau} - \sigma \frac{\xi - q - q^{-1} + \xi^{-1}}{h^2} = 0. \quad \text{или} \quad q^2 - \frac{4\gamma \cos(\varphi)}{1 + 2\gamma} q + \frac{2\gamma - 1}{2\gamma + 1} = 0.$$

Анализ этого уравнения показывает, что  $|q| \leq 1$  при любом  $\gamma$ . Для исследования аппроксимации схемы преобразуем ее к виду

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} - \sigma \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \frac{\sigma\tau^2}{h^2} \frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{h^2} = 0.$$

Видно, что схема аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma\tau^2}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

и при законе предельного перехода  $\sigma\tau/h^2 = \gamma = \text{const}$  аппроксимирует уравнение теплопроводности (2) с порядком точности  $O(\tau + h^2)$ , но при  $\sqrt{\sigma}\tau/h = \chi = \text{const}$  аппроксимирует уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Таким образом, схема "ромб" является явной абсолютно устойчивой и обладает условной аппроксимацией. При ее использовании следует избегать счета с шагом по времени  $\tau \approx h/\sqrt{\sigma}$ .

### 5.6.2. Неявные схемы

Если в (32) аппроксимацию производной по пространству записать на  $n+1$ -м временном слое, то получим неявную разностную схему аналогичного порядка точности  $O(\tau + h^2)$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} - \sigma \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0. \quad (35)$$

Для исследования ее устойчивости воспользуемся методом Неймана. Спектральное уравнение схемы запишется

$$\frac{q-1}{\tau} - \sigma \frac{q(\xi - 2 + \xi^{-1})}{h^2} = 0. \quad \text{откуда } q = \frac{1}{1 - 2\gamma(\cos(\varphi) - 1)}$$

и при любом значении  $\gamma$  всегда  $q \leq 1$ , т.е. схема (35) является безусловно устойчивой.

Для повышения порядка аппроксимации построим схему с весами, являющуюся комбинацией явной (32) и неявной (35) схем:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} - \sigma \left[ \Theta \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \Theta) \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} \right] = 0, \quad (36)$$

где «весовой» параметр  $0 \leq \Theta \leq 1$ . С помощью спектрального анализа можно показать (сделайте это самостоятельно), что условием устойчивости схемы являются:

$$\gamma \leq \begin{cases} \frac{1}{2(1-2\Theta)}, & \text{при } 0 \leq \Theta < 1/2, \\ \text{нет ограничений} & \text{при } 1/2 \leq \Theta \leq 1. \end{cases} \quad (37)$$

Рассмотрим аппроксимацию схемы на решении уравнения (2), используя его дифференциальное следствие  $u_{tt} = \sigma^2 u_{xxxx}$ :

$$u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} - \sigma \left\{ \Theta u_{xx} + \frac{\Theta h^2}{12} u_{xxxx} + \Theta \tau \sigma u_{xxxx} + (1 - \Theta) \left[ u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} \right] \right\} + O(\tau^2) + O(h^4) = 0.$$

Учитывая, что  $u_{tt} = \sigma^2 u_{xxxx}$ , остаточный член примет вид

$$\sigma u_{xxxx} \left[ \frac{\sigma\tau}{2} - \frac{1}{12}h^2 - \sigma\tau\Theta \right] + O(\tau^2) + O(h^4)$$

и при  $\Theta = \Theta_{opt} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau\sigma}$  сумма членов в квадратных скобках обращается в нуль, т. е. при  $\Theta = \Theta_{opt}$  схема (39) имеет второй порядок точности по времени и четвертый по пространству. Очевидно, что  $\Theta_{opt} \leq 1/2$  и схема при этом становится условно устойчивой. Если положить  $\Theta = 0$  (явная схема), то квадратная скобка обращается в нуль при  $\sigma\tau/h^2 = \gamma = 1/6$  и в этом случае схема (37) имеет порядок аппроксимации  $O(\tau^2) + O(h^4)$ . В.К.Саулевым было показано, что если выбрать  $\gamma = 1/\sqrt{2\sigma}$ , то порядок аппроксимации повышается до  $O(\tau^4) + O(h^6)$ . При  $\Theta = 1/2$  схема имеет порядок  $O(\tau^2) + O(h^2)$ , но зато становится безусловно устойчивой. Это наиболее распространенный вариант схемы с весами, известный в литературе под названием схема Кранка-Николсона.

Схемы (35), (36) можно записать в следующем общем виде:

$$A_i y_{i-1}^{n+1} + C_i y_i^{n+1} + B_i y_{i+1}^{n+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (38)$$

где

$$A_i = B_i = -\gamma\Theta, \quad C_i = 1 + 2\gamma\Theta, \quad F_i = y_i^n + (1 - \Theta)(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n).$$

В случае первой краевой задачи реализация краевых условий следующая

$$\begin{aligned} A_0 = B_0 = 0, \quad C_0 = 1, \quad y_0^{n+1} = F_0 = \gamma_1, \quad A_N = B_N = 0, \\ C_N = 1, \quad y_N^{n+1} = F_N = \gamma_2, \end{aligned}$$

и (38) является системой линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Нетрудно видеть, что  $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$ , т.е. матрица этой системы имеет диагональное преобладание, и для решения системы можно применять метод прогонки, который будет всегда устойчивым.

Подробно метод прогонки рассматривался в гл.2 и здесь приведем сразу выражения для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_i = -\frac{B_i}{C_i + A_i\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{F_i - A_i\beta_{i-1}}{C_i + A_i\alpha_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Значения сеточной функции определяются из обратной прогонки:

$$y_i^{n+1} = \alpha_i y_{i+1}^n + \beta_i, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0. \quad y_N^{n+1} = \gamma_2.$$

В случае второй и третьей краевых задач аппроксимации входящих в них производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$  на неявном  $(n+1 - m)$  слое производится точно также, как и в случае краевой задачи для ОДУ (см. гл. 4). Это позволяет, оставаясь в рамках двухточечной аппроксимации краевых условий также получить второй порядок аппроксимации разностной схемы.

### 5.6.3. Решение многомерных уравнений теплопроводности

В самом общем случае линейное уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0, \quad \sigma > 0$$

Построение явных разностных схем для его решения особых проблем не вызывает, поскольку обобщение рассмотренных в п. 5.6.1 одномерных схем на пространственный случай вполне очевидно. Для их устойчивости достаточно выполнения условия

$$\tau \leq \min(h_1^2, h_2^2, h_3^2) / (2\sigma)$$

где  $h_1, h_2, h_3$  - шаги сетки по координатам  $x, y, z$  соответственно. С неявными разностными схемами дело обстоит иначе. Рассмотрим возникающие здесь проблемы для случая двух переменных. Запишем для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \sigma > 0$$

схему с весами по аналогии с одномерным случаем

$$\begin{aligned} \frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} - \sigma \left[ \Theta \left( \frac{y_{i+1,j}^{n+1} - 2y_{i,j}^{n+1} + y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^{n+1} - 2y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} \right) + \right. \\ \left. + (1 - \Theta) \left( \frac{y_{i+1,j}^n - 2y_{i,j}^n + y_{i-1,j}^n}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^n - 2y_{i,j}^n - y_{i,j-1}^n}{h_2^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (39).$$

Здесь  $y_{i,j}^n$  - сеточная функция двух пространственных переменных.

В этом случае в (39) на каждом шаге по времени приходится решать систему уравнений

$$\begin{aligned}
& -\Theta\gamma_1(y_{i-1,j}^{n+1} + y_{i+1,j}^{n+1}) - \Theta\gamma_2(y_{i,j-1}^{n+1} + y_{i,j+1}^{n+1}) + [1 + 2\Theta(\gamma_1 + \gamma_2)]y_{i,j}^{n+1} = \\
& = y_{i,j}^n + (1 - \Theta)\tau[\gamma_1(y_{i-1,j}^n - 2y_{i,j}^n + y_{i+1,j}^n) + \gamma_2(y_{i,j-1}^n - 2y_{i,j}^n + y_{i,j+1}^n)]
\end{aligned}$$

Для ее решения можно применить метод *матричной прогонки*. С этой целью запишем систему уравнений (39) в матричной форме

$$A_i \bar{y}_{i-1}^{n+1} + C_i \bar{y}_i^{n+1} + B_i \bar{y}_{i+1}^{n+1} = \bar{F}_i,$$

где

$$\bar{y}_i = \begin{pmatrix} y_{i,0} \\ y_{i,1} \\ \dots \\ y_{i,N_2} \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_i = \begin{pmatrix} F_{i,0} \\ F_{i,1} \\ \dots \\ F_{i,N_2} \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $A_i, B_i, C_i$  в случае первой краевой задачи имеют вид

$$A_i = B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\Theta\gamma_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\Theta\gamma_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\Theta\gamma_2 & 1 + 2\Theta(\gamma_1 + \gamma_2) & -\Theta\gamma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\Theta\gamma_2 & 1 + 2\Theta(\gamma_1 + \gamma_2) & -\Theta\gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

По аналогии с методом скалярной прогонки

$$\begin{aligned}
\bar{y}_i &= \alpha_i \bar{y}_{i+1} + \bar{\beta}_i, \quad \text{где } \alpha_i \text{ – матрицы, } \bar{\beta}_i \text{ – векторы,} \\
\alpha_i &= -(C_i + A_i \alpha_{i-1})^{-1} B_i, \quad \bar{\beta}_i = (C_i + A_i \alpha_i)^{-1} (\bar{F}_i - A_i \bar{\beta}_{i-1}). \quad (40)
\end{aligned}$$

Здесь уже приходится умножать матрицы на вектор и обращать матрицу, что приводит к резкому увеличению числа арифметических операций по сравнению со скалярной прогонкой и к соответствующему увеличению времени сче-

та на ЭВМ. Ещё более осложняется ситуация в трехмерном случае. Очевидно, что причиной этого является увеличение размерности разностного оператора на верхнем временном шаге по сравнению с одномерным. Рассмотрим ряд способов уменьшения его размерности.

### 5.6.3.1. Схема продольно-поперечной прогонки

Чтобы упростить громоздкие формы записи разностных схем в многомерных случаях, введем несколько разностных операторов.

1).  $T_k^{(1)}, T_k^{(2)}, T_k^{(3)}$  – операторы сдвига по первому, второму и третьему нижним индексам соответственно. Например,  $T_{-1}^{(1)}y^n = y_{i-1,j}^n$ ,  $T_1^{(2)}y^{n+1} = y_{i,j+1}^{n+1}$  и т.д.

$$2). \Lambda_m = \sigma \frac{T_{-1}^{(m)} - 2T_0^{(m)} + T_1^{(m)}}{h_m^2}, \quad (m=1, 2, 3).$$

$$3). \Lambda = \sum_{j=1}^m \Lambda_j.$$

Для двухмерного уравнения теплопроводности рассмотрим следующую двухшаговую разностную схему (здесь и далее нижние индексы у сеточной функции для простоты будем опускать) для случая  $h_1 = h_2 = h$ .

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^n), \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^{n+1}). \end{aligned} \tag{41}$$

Эта схема была предложена Писманом, Рэкфордом и Дугласом в 1955г. и называется схемой продольно-поперечной прогонки. Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} A_1 y^{n+1/2} - B_1 y^n &= 0, \\ A_2 y^{n+1} - B_2 y^{n+1/2} &= 0, \end{aligned}$$

где  $A_1 = E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1$ ,  $A_2 = E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2$ ,  $B_1 = E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2$ ,  $B_2 = E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1$ .

Умножим первое уравнение слева на  $B_2$ , второе на  $A_1$  и сложим

$$A_1 A_2 y^{n+1} - B_2 B_1 y^n + (B_2 A_1 - A_1 B_2) y^{n+1/2} = 0.$$

В нашем случае коэффициент температуропроводности  $\sigma$  постоянный и матрицы  $A_1$  и  $B_2$  коммутативны. Тогда  $B_2 A_1 = A_1 B_2$  и

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} (y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{4} \tau \Lambda_1 \Lambda_2 (y^{n+1} - y^n)$$

или с точностью  $O(\tau + h^2)$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = \Lambda \frac{y^n + y^{n+1}}{2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

то есть аппроксимация имеет место. Покажем безусловную устойчивость схемы (41) с помощью метода Неймана. Введем гармоники

$$y^n = q^n \xi^{k_1+k_2}, \quad y^{n+1/2} = q^{n+1/2} \xi^{k_1+k_2}$$

и подставим их в (41). Получим

$$\rho_1 = \frac{q^{n+1/2}}{q^n} = \frac{1 - \frac{1}{2} \alpha_2}{1 + \frac{1}{2} \alpha_1}, \quad \rho_2 = \frac{q^{n+1}}{q^{n+1/2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \alpha_1}{1 + \frac{1}{2} \alpha_2},$$

$$\rho = \rho_1 \rho_2 = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q = \frac{1 - \frac{1}{2} \alpha_1}{1 + \frac{1}{2} \alpha_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \alpha_2}{1 + \frac{1}{2} \alpha_1}, \quad (42)$$

где

$$\alpha_s = 4\gamma \sin^2(\varphi_s/2), \quad \gamma = \frac{\sigma\tau}{h^2}, \quad \varphi_s = k_s h, \quad s = 1, 2.$$

Отсюда следует, что  $|q| \leq 1$  при любом значении  $\tau > 0$ . Таким образом, благодаря введению вспомогательного полуцелого шага мы получили абсолютно устойчивую разностную схему, в которой вместо матричной прогонки нужно применять только две скалярные, в результате чего резко уменьшается объем вычислений. Из (42) видно, что на первом полушаге ошибка в направлении  $x_1$  уменьшается в  $1 + \alpha_1/2$ , а в направлении  $x_2$  возрастает в  $1 - \alpha_2/2$  раз; на втором - наоборот, причем так, что на двух полушагах она не возрастает по модулю. Из этих соображений сразу видно, что схема продольно-поперечной прогонки неприменима к трехмерному случаю, поскольку тогда число измерений нечётно. Для решения трехмерного уравнения теплопроводности Дуглас и Рэкфорд предложили схему *стабилизирующей поправки*:

$$\begin{aligned}
\frac{y^{n+1/3} - y^n}{\tau} &= \Lambda_1 y^{n+1/3} + \Lambda_2 y^n + \Lambda_3 y^n, \\
\frac{y^{n+2/3} - y^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2 (y^{n+2/3} - y^n), \\
\frac{y^{n+1} - y^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3 (y^{n+1} - y^n)
\end{aligned} \tag{43}$$

Структура её такова: первый дробный шаг дает полную аппроксимацию уравнения теплопроводности, следующие шаги являются поправочными и служат цели улучшения устойчивости. Реализуется она тремя скалярными прогонками и является абсолютно устойчивой.

### 5.6.3.2. Схема расщепления

Как было показано в предыдущих разделах, аппроксимация явными операторами ухудшает устойчивость схемы. Это приводит к идее на каждом дробном шаге использовать только неявные операторы. Такое возможно, если аппроксимировать одномерные дифференциальные операторы

$L_s = \sigma \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$ ,  $s = 1, 2, 3$ , но тогда полная аппроксимация достигается только на целом шаге. Такие схемы называются схемами расщепления.

Для трехмерного уравнения теплопроводности простейшая схема расщепления запишется

$$\begin{aligned}
\frac{y^{n+1/3} - y^n}{\tau} &= \Lambda_1 y^{n+1/3}, \\
\frac{y^{n+2/3} - y^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2 y^{n+2/3}, \\
\frac{y^{n+1} - y^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3 y^{n+1}
\end{aligned} \tag{44}$$

Перепишем ее в виде

$$A_s y^{n+s/3} - B_s y^{n+(s-1)/3} = 0, \quad A_s = E - \tau \Lambda_s, \quad B_s = E, \quad s = 1, 2, 3$$

Исключая  $y^{n+1/3}$ ,  $y^{n+2/3}$ , приходим к схеме

$$A_1 A_2 A_3 y^{n+1} - E y^n = 0.$$

Разлагая по степеням  $\tau$ , получим



$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = \Lambda y^{n+1} - \tau(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3)y^{n+1} + \tau^2\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3y^{n+1},$$

т. е. имеет место аппроксимация с порядком  $O(\tau + h^2)$ . Исследование устойчивости схемы можно провести методом Неймана аналогично тому, как мы это делали для схемы (41). В результате получим (проделайте весь анализ самостоятельно или на семинаре):

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{1 + \alpha_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{1 + \alpha_2}, \quad \rho_3 = \frac{1}{1 + \alpha_3}, \\ \rho = q &= \frac{1}{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3)}, \\ \alpha_s &= 4\gamma \sin^2(\varphi_s / 2), \quad \gamma = \frac{\sigma\tau}{h^2}, \quad \varphi_s = k_s h, \quad s = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $|q| \leq 1$  и схема абсолютно устойчива. Для повышения точности здесь можно применить схему с весами

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1/3} - y^n}{\tau} &= \Lambda_1[\Theta y^{n+1/3} + (1 - \Theta)y^n], \\ \frac{y^{n+2/3} - y^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2[\Theta y^{n+2/3} + (1 - \Theta)y^{n+1/3}], \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3[\Theta y^{n+1} + (1 - \Theta)y^{n+2/3}] \end{aligned}$$

и тогда при  $\Theta = 1/2$  получаем абсолютно устойчивую разностную схему с точностью  $O(\tau^2 + h^2)$ .

#### 5.6.4. Параллельные алгоритмы для решения уравнения теплопроводности

Технология распараллеливание явных разностных схем как в одномерных, так и в многомерных задачах является такой же, как и для решения уравнения переноса и описана в п. 5.5.5. Для неявных разностных схем алгоритмы распараллеливания определяются структурами самих разностных схем. Реализации схем для решения одномерных задач основаны на применении метода прогонки, способы распараллеливания которых были рассмотрены в гл.3. Поэтому более подробно рассмотрим подходы к распараллеливанию разностных схем для решения многомерных задач теплопроводности. Так, для схемы метода матричной прогонки (40) можно следующий предложить гибридный алгоритм распараллеливания с использованием MPI и OpenMP. Метод матричной про-

гонки (40) легко реализуется по аналогии со скалярной прогонкой в виде встречных прогонок, каждая из которых выполняется на своем вычислительном узле с использованием MPI, а операции с матрицами и векторами (обращение матриц, операции перемножения матриц и векторов и операции сложения) распараллеливаются на ядрах внутри каждого вычислительного узла с использованием OpenMP. Организация параллельной матричной прогонки на нескольких вычислительных узлах по аналогии со скалярной прогонкой (п. 3.1.5 гл. 3) сложна в реализации и не находит применения. Гораздо более высоким коэффициентом эффективности распараллеливания обладают схемы, основанные на последовательном решении одномерных задач – рассмотренные ранее схема продольно-поперечной прогонки, схема стабилизирующей поправки и схемы расщепления, поскольку их реализации основаны на применении скалярных (одномерных) прогонок. В этом случае область решения по одному из координатных направлений разбивается на подобласти (полосы) по числу процессоров, в каждой из которых прогонкой по этому направлению каждый процессор независимо вычисляет значения сеточной функции на первом дробном шаге, после чего аналогичным образом проводятся вычисления по другому направлению на следующем дробном шаге. При использовании системы OpenMP, когда массив сеточной функции целиком располагается в памяти вычислительного узла, никаких проблем не возникает. Однако при использовании MPI возникает необходимость в обменах достаточно большими объемами данных между процессорами, поскольку при смене направления скалярной прогонки необходимо транспонировать массив сеточной функции. Это обстоятельство значительно снижает эффективность такого параллельного алгоритма. Чтобы избежать транспонирования массива, можно при смене направления прогонки применить ее распараллеливание по алгоритму, описанному в гл.3 (п.3.1.5), принимая за узлы распараллеливания границы полос. В этом случае эффективность распараллеливания остается достаточно высокой.

### 5.7. Решение эллиптических уравнений

В качестве классического представителя уравнений этого типа рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u - f = 0, \quad (45)$$

частным случаем которого является уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ . Напомним, что в общем случае дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, f(x_1, x_2, x_3) - \text{функция источников.}$$

Уравнения этого класса не являются эволюционными, не имеют действительных характеристических направлений, а поэтому возмущение решения в какой-либо точке области влияет на всю область.

Как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна, и для них может быть поставлена только краевая задача. Ограничиваясь далее двумерным случаем, в качестве таковой будем рассматривать в некоторой замкнутой области  $D$  с границей  $\Gamma$  задачу Дирихле

$$\Delta u = f, \quad u|_{\Gamma} = \alpha(s), \quad s - \text{расстояние вдоль } \Gamma, \quad (46)$$

когда на границе области задано значение искомой функции.

### 5.7.1. Задача Дирихле

В случае двумерного уравнения Пуассона проблема аппроксимации дифференциальной задачи разностной не является столь очевидной. Если граница  $\Gamma$  области определения решения  $D$  гладкая и функция  $\alpha(s)$  в (46) тоже гладкая, то второй порядок аппроксимации уравнения гарантирует второй порядок точности решения. Если, однако, либо граница области, либо функции, заданные на границах, оказываются негладкими, то в решении задачи в окрестности особых точек возникают весьма существенные погрешности. Поэтому равномерная сетка и второй порядок аппроксимации по обеим переменным внутри области еще не обеспечивают решения задачи со вторым порядком точности. В таких случаях используют либо сгущение сетки в окрестности особенностей решения, либо предварительно выделяют эти особенности в виде аналитического решения задачи с последующей стыковкой его с численным решением в остальной области. Заметим, однако, что при определенной согласованности граничных условий и правой части уравнения в особых точках границы решение может оказаться гладким, и в этом случае дополнительных проблем с аппроксимацией задачи не возникает. Например, такая ситуация имеет место, если область  $D$  прямоугольная, а  $\alpha(s)$  на  $\Gamma$  непрерывная.

Перейдем теперь к задаче Дирихле. Пусть областью  $D$  будет прямоугольник и все условия согласования, обеспечивающие гладкость решения, выполнены. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= f(x_1, x_2) \quad \text{в } D\{a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}, \\ u(a, x_2) &= \gamma_1(x_2), \quad u(b, x_2) = \gamma_2(x_2), \\ u(x_1, c) &= \gamma_3(x_1), \quad u(x_1, d) = \gamma_4(x_1). \end{aligned}$$

В области  $D$  построим прямоугольную сетку с шагами  $h_1 = (b - a) / N_1$ , и

$h_2 = (d - c)/N_2$ , где  $N_1, N_2$  - целые положительные числа, и введём в узлах этой сетки сеточную функцию  $y_{i,j}$ . Аппроксимируя вторые производные центральными разностями, имеем

$$\begin{aligned} \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{h_2^2} &= f_{i,j}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ y_{0,j} = \gamma_{1,j}, \quad y_{N_1,j} = \gamma_{2,j}, \quad y_{i,0} = \gamma_{3,i}, \quad y_{i,N_2} = \gamma_{4,i}. \end{aligned} \quad (47)$$

Для прямоугольной области полученную систему линейных алгебраических уравнений можно записать в векторно-матричной форме:

$$A_i \vec{y}_{i-1} + C_i \vec{y}_i + B_i \vec{y}_{i+1} = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ C_i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1^2 & -2(h_1^2 + h_2^2) & h_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_i = \begin{pmatrix} y_{i,0} \\ y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ \dots \\ y_{i,N_2} \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_i = h_1^2 h_2^2 \begin{pmatrix} \gamma_{3,i} \\ f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ \dots \\ \gamma_{4,i} \end{pmatrix} \\ \vec{y}_0 &= (\gamma_{1,0}, \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,N_2})^T, \quad \vec{y}_{N_1} = (\gamma_{2,0}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,N_2})^T \end{aligned}$$

Система (48) имеет блочно-трехдиагональную матрицу и может быть решена с помощью метода матричной прогонки, который рассматривался в п. 5.6.3. Однако этот метод, как уже отмечалось, требует больших затрат машинного времени и практически не применяется. Поэтому для решения (48) обычно используют итерационные методы. Достаточно эффективным здесь оказывается метод Зейделя в различных его модификациях. Рассмотрим некоторые из них.

**Поточечный (классический) метод Зейделя** для решения (47) запишется

$$\begin{aligned} 2(h_1^2 + h_2^2)y_{i,j}^{n+1} &= h_2^2 y_{i+1,j}^n + h_2^2 y_{i-1,j}^{n+1} + h_1^2 y_{i,j+1}^n + h_1^2 y_{i,j-1}^{n+1} - h_1^2 h_2^2 f_{i,j}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (49)$$

где  $n$  - номер итерации. Начальные значения  $y_{i,j}^0$  сеточной функции могут задаваться произвольно. Нетрудно видеть, что влияние граничных условий в этом методе распространяется на каждом итерационном шаге на один узел сетки по соответствующей координате, поэтому сходимость оказывается достаточно медленной. Более высокой скоростью сходимости обладает **блочный метод Зейделя**, который записывается для (48) в виде

$$-C_i \bar{y}_i^{n+1} = A_i \bar{y}_{i-1}^{n+1} + B_i \bar{y}_{i+1}^n - \bar{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$$

Если расписать его по точкам сетки, то получим следующую формулу:

$$2(h_1^2 + h_2^2)y_{i,j}^{n+1} = h_2^2 y_{i+1,j}^n + h_2^2 y_{i-1,j}^{n+1} + h_1^2 y_{i,j+1}^{n+1} + h_1^2 y_{i,j-1}^{n+1} - h_1^2 h_2^2 f_{i,j}, \quad (50)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad n \geq 0,$$

Для нахождения  $y_{i,j}^{n+1}$  нужно для всех его элементов (по индексу  $j$ , в направлении  $x_2$ ) решить двухточечную краевую задачу (50) с известной правой частью, например методом прогонки, и полученное решение разместить на месте  $\bar{y}_i^{n+1}$ . Нетрудно видеть, что в этом случае влияние граничных условий по направлению  $x_2$  распространяется значительно быстрее, чем в поточечном варианте метода, и скорость сходимости оказывается выше, особенно в случае, когда область интегрирования вытянута в направлении  $x_2$ . В ходе итерационного процесса можно чередовать "неявные" направления в (50), что может дополнительно повысить скорость сходимости.

Для ускорения сходимости метода Зейделя часто используют так называемую релаксацию решения. С этой целью к (49), (50) добавляют еще один шаг

$$y_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega) y_{i,j}^n + \omega \hat{y}_{i,j}^{n+1} \quad (51)$$

где  $\hat{y}_{i,j}^{n+1}$  - решение, полученное по методам (49) или (50),  $\omega$  - итерационный параметр, причем  $0 < \omega < 2$ . При  $\omega > 1$  итерационный метод (51) называется *методом верхней релаксации*, при  $\omega = 1$  - *полной релаксации* и при  $\omega < 1$  - *нижней релаксации*. В случае поточечного метода Зейделя метод верхней релаксации запишется

$$y_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega) y_{i,j}^n + \omega [h_2^2 y_{i+1,j}^n + h_2^2 y_{i-1,j}^{n+1} + h_1^2 y_{i,j+1}^n + h_1^2 y_{i,j-1}^{n+1} - h_1^2 h_2^2 f_{i,j}] / [2(h_1^2 + h_2^2)], \quad (52)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad n \geq 0,$$

Существует оптимальное значение  $\omega = \omega_{\text{opt}}$ , зависящее от параметров сетки и способа получения  $y_{i,j}^{n+1}$ , при котором достигается максимальная скорость сходимости метода.

Так, для (52) в случае квадратной области и когда  $N_1 = N_2 = N$ , имеем

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sin(\pi/N)}. \quad (53)$$

### 5.7.2. Параллельные алгоритмы метода Зейделя.

Для реализации описанных выше двух вариантов метода Зейделя на кластерной ВС можно предложить следующие параллельные алгоритмы, основанные на том, что в этих методах вычисления значений сеточных функций начинаются с приграничных узлов сетки. В случае поточечного метода область  $D$  можно, например, разрезать на  $N$  горизонтальных полос, каждую из которых, в свою очередь, разделить на две вертикальные (рис. 5.7).

$\Pi_{N1}$	$\Pi_{N2}$
⋮	
$\Pi_{21}$	$\Pi_{22}$
$\Pi_{11}$	$\Pi_{12}$

Рис. 5.7. Распараллеливание поточечного метода

Тогда счет с использованием  $2N$  процессоров можно организовать следующим образом. Вычисления нового приближения сеточной функции  $y_{i,j}^{n+1}$  начинают навстречу друг другу процессоры  $\Pi_{11}, \Pi_{12}, \Pi_{N1}, \Pi_{N2}$  в каждой из полос, примыкающих к верхней и нижней границам области. Необходимые им значения сеточной функции  $y_{i,j}^n$  с предыдущего итерационного слоя на границах своих горизонтальных полос они получают от своих «соседних» полос и передают им же вычисленные новые значения  $y_{i,j}^{n+1}$ , что позволяет начать вычисления процессорам  $\Pi_{21}, \Pi_{22}, \Pi_{N-1,1}, \Pi_{N-1,2}$  и т.д. уже тогда, когда вычислено значение  $y_{i,j}^{n+1}$  в одном узле сетки. После того, как «крайние» процессоры  $\Pi_{11}, \Pi_{12}, \Pi_{N1}, \Pi_{N2}$  закончат свои вычисления, они начинают вычислять следующее приближение  $y_{i,j}^{n+2}$ , поскольку имеют все необходимые исходные данные. Нетрудно видеть, что предложенная схема организации вычислений близка к конвейерной, потери из-за простоя процессоров сравнительно невелики и возникают только при выполнении первой итерации.

Для блочного метода Зейделя область  $D$  разрезается на  $N$  вертикальных полос, если прогонка в (55) осуществляется по столбцам. Каждая из таких полос разрезается на две горизонтальные полосы для реализации внутри каждой вертикальной полосы встречных прогонок (рис. 5.8). Вычисления значений

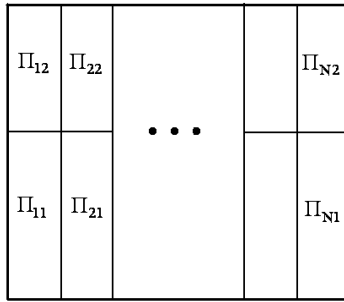


Рис. 5.8. Распараллеливание блочного метода

сеточной функции  $y_{i,j}^{n+1}$  начинают процессоры  $\Pi_{11}, \Pi_{12}$  и  $\Pi_{N,1}, \Pi_{N,2}$  в направлениях «от границ». Информационные обмены происходят на границах с соседними полосами, причем обмен осуществляется векторами  $\bar{y}_m^n$  и  $\bar{y}_m^{n+1}$ , где  $m$  – номер вертикальной полосы. При этом соседние процессоры  $\Pi_{21}, \Pi_{22}$  и  $\Pi_{N-1,1}, \Pi_{N-1,2}$  простаивают до тех пор, пока не получат от  $\Pi_{11}, \Pi_{12}$  и  $\Pi_{N,1}, \Pi_{N,2}$  значения

$\bar{y}_1^{n+1}$  и  $\bar{y}_N^{n+1}$  соответственно. Далее аналогичным образом начинают вычисления процессоры  $\Pi_{31}, \Pi_{32}$  и  $\Pi_{N-2,1}, \Pi_{N-2,2}$  и так далее, что позволяет организовать такие же конвейерные вычисления, как и для предыдущего метода. В этой схеме распараллеливания простой процессоров на первой итерации оказываются несколько большими, чем в предыдущей, однако скорость сходимости итераций для данного метода выше, что может обеспечить ему определенное преимущество перед первым.

### 5.7.3. Метод установления

Рассмотрим в прямоугольной области  $D$  с границей  $\Gamma$  задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad u(x_1, x_2) = \gamma(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \quad (54)$$

Наряду с ней рассмотрим нестационарную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] = 0, \quad u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad (55)$$

с теми же стационарными краевыми условиями, что и в (54). Обозначим через  $U(x_1, x_2)$  решение задачи (54), через  $u(x_1, x_2, t)$  - решение задачи (55). Тогда

$$v(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) - U(x_1, x_2)$$

удовлетворяет уравнению (55) с начальными данными

$$v(x_1, x_2, 0) = v_0(x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) - U(x_1, x_2)$$

и нулевыми краевыми условиями

$$v(x_1, x_2, t) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma.$$

Решение  $v(x_1, x_2, t)$  представляется в виде ряда Фурье

$$v(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{k,m}(t) \sin(\pi k x_1) \sin(\pi m x_2) \quad (56)$$

где  $A_{k,m}(t) = a_{k,m} e^{-\alpha^2 \pi^2 (k^2 + m^2) t}$  - коэффициент Фурье функции  $v(x_1, x_2, t)$ ,  $a_{k,m}$  - коэффициент Фурье функции  $v_0(x_1, x_2)$ . Формулу (56) можно записать в операторном виде

$$v = S(t) v_0.$$

Оператор  $S(t)$  в пространстве  $L_2$  имеет норму  $\|S(t)\| = e^{-2\alpha^2 \pi^2 t}$ . Отсюда

$$\|S(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Это означает, что

$$\|v(x_1, x_2, t)\| = \|u(x_1, x_2, t) - U(x_1, x_2)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

т.е. решение нестационарной задачи стремится к решению стационарной при тех же краевых условиях, независимо от выбора начальных данных. В этом и заключается суть метода установления - в замене стационарной задачи на нестационарную с теми же краевыми условиями и получении её предельного решения при  $t \rightarrow \infty$ . При этом, как правило, решение нестационарной задачи оказывается значительно проще. Так, нестационарная задача (55) имеет параболический тип (двухмерное уравнение теплопроводности) и для ее численного решения могут применяться эффективные методы, рассмотренные в п. 3.3.

Ясно, что существует множество нестационарных уравнений, решения которых сходятся к решению стационарной задачи. Вместо уравнения (55) можно, например, рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] = 0,$$

Это нестационарное уравнение приобретает характер уравнения затухающих колебаний, и, как можно показать, при любых начальных данных его решение сходится к решению (54). Скоростью сходимости можно управлять за счет выбора параметров  $\alpha$  и  $b$ . Вообще говоря, нестационарные уравнения могут и не иметь никакого физического смысла, от них требуется только выполнение условия сходимости (57).



## ЛИТЕРАТУРА

1. Рычков А.Д. Численные методы и параллельные вычисления: Учебное пособие/СибГУТИ – Новосибирск, 2007. – 144 с.
2. Бахвалов Е.А., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. Численные методы: Учеб. пособие. - М: Наука, 1987. - 600 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. т.1, т.2.- М.: Наука, 1997.
4. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М: Наука, 1987. - 248 с.
5. Воеводин В.В, Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – Спб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
6. Корнеев В.Д. Параллельное программирование в МРІ. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 304 с.
7. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. - М: Наука, 1975. - 350 с.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – Главная редакция физико-математической литературы из-ва «Наука», М., 1978, 589 с.
9. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. – 311 с.
10. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.